

TEOREMA DEL BINOMIO
EJERCICIOS RESUELTOS

1. Los *coeficientes binomiales* pueden definirse en una forma más general que la dada en Def. 1, y en forma inductiva, como sigue

DEFINICIÓN 1': Si $x \in R$ y $n \in N_0$ entonces:

$$(1) \quad \binom{x}{0} = 1$$

$$(2) \quad \binom{x}{n+1} = \frac{x-n}{n+1} \binom{x}{n}$$

Usando Def. 1 y Def. 1' calcular

a) $\binom{x}{1}$ b) $\binom{-1}{2}$ c) $\binom{1/2}{3}$ d) $\binom{n}{n}$, $n \in N$

Solución: De la definición 1'

$$a) \quad \binom{x}{1} = \binom{x}{0+1} = \frac{x-0}{1} \binom{x}{0} = x \cdot 1 = x$$

$$b) \quad \binom{-1}{2} = \binom{-1}{1+1} = \frac{-1-1}{2} \binom{-1}{1} = -1$$

$$c) \quad \binom{1/2}{3} = \binom{1/2}{2+1} = \frac{1/2-2}{3} \binom{1/2}{2} = -\frac{1}{2} \frac{1/2-1}{2} \binom{1/2}{1} \\ = -1/16$$

Aplicando Def. 1

$$d) \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! (n-n)!} = \frac{n!}{n! 0!} = 1$$

2. Demostrar que si $x \in R$ y $n \in N_0$, entonces:

$$\binom{x+1}{n+1} = \frac{x+1}{n+1} \binom{x}{n}.$$

Demostración: Lo haremos por inducción en n , con $x \in R$ fijo cualquiera.

$$\text{Si } n = 1, \binom{x+1}{1+1} = \frac{x+1-1}{1+1} \binom{x+1}{1} \quad [\text{definición 1}]$$

$$= \frac{x}{2} (x+1) \quad [\text{ejercicio 1 a)]}$$

$$\text{Por otro lado: } \frac{x+1}{1+1} \binom{x}{1} = \frac{x+1}{2} x$$

$$\text{Luego } \binom{x+1}{1+1} = \frac{x+1}{1+1} \binom{x}{1}, \quad \text{lo que prueba la validez del teorema para } n = 1.$$

$$\text{Supongamos que para algún } n \in N : \binom{x+1}{n+1} = \frac{x+1}{n+1} \binom{x}{n}$$

$$\text{Por demostrar que } \binom{x+1}{n+2} = \frac{x+1}{n+2} \binom{x}{n+1}$$

$$\text{En efecto: } \binom{\binom{x+1}{n+1} + 1}{n+2} = \frac{x+1-(n+1)}{n+2} \binom{x+1}{n+1} \quad (\text{def. 1})$$

$$= \frac{x-n}{n+2} \frac{x+1}{n+1} \binom{x}{n} \quad (\text{hipótesis inductiva})$$

$$= \frac{x+1}{n+2} \frac{x-n}{n+1} \binom{x}{n} = \frac{x+1}{n+2} \binom{x}{n+1}$$

Por teorema de inducción, la fórmula es verdadera para todo $n \in N$ (y para todo $x \in R$).

3. Se tienen 12 libros ¿de cuántas maneras puede hacerse una selección de 5 de ellos, si se desea que un libro determinado esté en cualquiera de las elecciones?

Solución: Puesto que un libro especificado debe incluirse en cualquiera selección, sólo falta seleccionar 4 entre los 11 restantes. Luego, el número de selecciones posibles es

$$N = \binom{11}{4} = \frac{11!}{4! (11-4)!} = 330$$

- 4.** Se desea seleccionar k objetos entre n . ¿Para qué valor de k se tiene el mayor número de elecciones posibles?

Solución: Los valores posibles para k son $1, 2, 3, \dots, n$; por comodidad consideraremos el valor 0 . Así, k puede asumir $n + 1$ valores.

Recordando que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, basta considerar los valores $k = 0, 1, 2, \dots, n/2$, si n es par, y los valores $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)/2$, si n es impar.

Examinemos el caso n par :

Si $0 \leq k \leq n/2$; entonces (Def. 1'):

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k} = \left[\frac{n}{k+1} - \frac{k}{k+1} \right] \binom{n}{k} >$$

$$> \left[n/(n/2) - 1 \right] \binom{n}{k} = \binom{n}{k}.$$

Vemos que el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ crece a medida que crece k , alcanzando su máximo para $k = \frac{n}{2}$.

Análogamente se prueba que en el caso n impar, el máximo valor de $\binom{n}{k}$ se obtiene cuando $k = (n-1)/2$ (o bien $(n+1)/2$).

5. Calcular, sin desarrollar el binomio, el sexto término en el desarrollo de $(x+y)^{15}$.

Solución: Denotando por t_6 el sexto término, tenemos

$$t_6 = \binom{15}{5} x^{10} y^5 = 3003 x^{10} y^5$$

6. Calcular el término central en el desarrollo de

$$\left(\sqrt[3]{x} - x^{-2}/2 \right)^6.$$

Solución: El desarrollo de este binomio tiene siete términos; luego, el término central es

$$t_4 = \binom{6}{3} \left(\sqrt[3]{x} \right)^3 \left(-x^{-2}/2 \right)^3 = -5x^{-5}/2$$

7. Calcular el término independiente de x (si lo hay), en el desarrollo del binomio $(x-1/x)^9$

Solución: El k -ésimo término en el desarrollo del binomio

$$\text{es } t_k = \binom{9}{k-1} x^{9-k+1} (-1/x)^{k-1} =$$

$$= (-1)^{k-1} \binom{9}{k-1} x^{11-2k}$$

Para que éste no dependa de x debe tenerse $11 - 2k = 0$.

Como la solución es $k = 11/2 \notin \mathbb{N}$, no hay término independiente de x en este desarrollo.

8. Demostrar que

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\text{b) } \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

$$\text{Demostración: } \text{a) } 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$\text{b) } 0 = 0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

9**. Obtener el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $(1 + x^2 - x^3)^9$

Solución: Desarrollando por el teorema del binomio se obtiene:

$$(1 + x^2 - x^3)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} 1^{9-k} (x^2 - x^3)^k = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} (x^2 - x^3)^k$$

Analicemos las potencias $(x^2 - x^3)^k$, $0 \leq k \leq 9$

$$(x^2 - x^3)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (x^2)^{k-i} (x^3)^i$$

$$= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x^{2k+i}$$

Debemos resolver cuando el exponente 8 aparece en la forma

$$2k+i, \quad 0 \leq k \leq 9, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Como $k > 4 \Rightarrow 2k + i > 8$, debe tenerse: $0 \leq k \leq 4$

$$k = 0 \Rightarrow i = 0 \quad \Rightarrow 2k + i = 0$$

$$k = 1 \Rightarrow i = 0, 1 \quad \Rightarrow 2k + i = 2, 3$$

$$k = 2 \Rightarrow i = 0, 1, 2 \quad \Rightarrow 2k + i = 4, 5, 6$$

$$k = 3 \Rightarrow i = 0, 1, 2, 3 \quad \Rightarrow 2k + i = 6, 7, 8, 9 \Rightarrow k = 3, \quad i = 2$$

$$k = 4 \Rightarrow i = 0, 1, 2, 3, 4 \quad \Rightarrow 2k + i = 8, 9, 10, 11, 12, \Rightarrow k = 4, \quad i = 0$$

Así, los coeficientes que multiplican a x^8 son

$$\binom{9}{3} \binom{3}{2} \quad \text{y} \quad \binom{9}{4} \binom{4}{0}.$$

Finalmente, el coeficiente de x^8 es $3\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 378$.

10*. Calcular $S = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} 5^{2n-2k} 2^{2k-2} 6^{k+2}$

Solución :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (5^2)^{(n-k)} \cdot (2^2 \cdot 6)^k \cdot 2^{-2} \cdot 6^2$$

$$= 25 \cdot \frac{36}{4} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} 25^{n-1-k} 24^k$$

$$= 25 \cdot 9 (25-24)^{n-1} = 225$$

11*. Probar que $\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ par}}}^n \binom{n}{i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impar}}}^n \binom{n}{j}$.

Solución: Lo que se pide demostrar es equivalente a:

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ par}}}^n \binom{n}{i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impar}}}^n \binom{n}{j} = 0$$

Es decir, a: $0 = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ par}}}^n \binom{n}{i} (-1)^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impar}}}^n \binom{n}{j} (-1)^j$

$$= \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t, \text{ lo cual, según vimos en ejercicio 8, es verdadero.}$$

12. Demostrar el Teorema del Binomio: Dados $a, b \in R$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \forall n \in N$$

Demostración: Por inducción.

i) Para $n = 1$ se tiene que:

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = a + b$$

ii) Supongamos el teorema válido para $m \in N$, es decir:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$$

Por demostrar:

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k}$$

Se tiene que:

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m (a+b) = a(a+b)^m + b(a+b)^m$$

Luego, por hipótesis inductiva, se obtiene:

$$\begin{aligned} (a+b)^{m+1} &= a \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k} \right] + b \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k} \right] \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} a^k b^{m+1-k} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} a^k b^{m+1-k} + \binom{m}{m} a^{m+1} + \binom{m}{0} b^{m+1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k} \end{aligned}$$

$$= \binom{m}{m} a^{m+1} + \sum_{k=1}^m \left[\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right] a^k b^{m+1-k} + \binom{m}{0} b^{m+1}$$

$$= \binom{m}{0} b^{m+1} + \sum_{k=1}^m \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k} + \binom{m}{m} a^{m+1}$$

(Teor. 1 -(1))

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k} \quad [\text{pues } \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 =$$

$$= \binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n}.$$

$$\therefore (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$