UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Guía de Ejercicios Resueltos[1]
Series de Potencias
MAT-022

1. Encuentre el dominio de convergencia de la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n.$$

Solución: El radio de convergencia de la serie esta dado el siguiente límite:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(2n+2)!}{(2n)!(n+1)!^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4$$

De esta manera, se deduce que el intervalo de convergencia es $(-3,5)$. Resta determinar el dominio de convergencia, para ello debemos analizar la serie en los valores extremos $x=-3$ y $x=5$. Reemplazando estos valores obtenemos las siguientes series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(4)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n.$$

Notemos ahora que la sucesión $\{a_n\}$ definida como $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n$ no es convergente a cero, pues es una sucesión creciente, en efecto,

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2n+1}{2n+2} < 1.$$

En conclusión, ambas series divergen [2].

Finalmente se concluye que el dominio de convergencia es $(-3,5)$.

2. Encuentre el dominio de convergencia de la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}(x+2)^n.$$

Solución: El radio de convergencia de la serie esta dado por el siguiente límite:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1}\,\frac{(n+1)^2+1}{n+2} = 1.$$

---

[1] Printed in LaTeX. EOP/eop (enrique.otarola@alumnos.utfsm.cl). September 4, 2006
[2] Recuerde que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces la sucesión a_n tiende a cero.

Luego se deduce que el intervalo de convergencia es $(-3,-1)$, resta determinar el dominio de convergencia. Con este fín, reemplazando la serie en los extremos, obtenemos las siguientes series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}.$$

Para deducir la divergencia de la primera serie se puede ocupar el criterio de comparación al límite con la sucesión $b_n = \frac{1}{n}$, mientras que para deducir la convergencia de la segunda serie se puede utilizar el criterio de Leibniz, en efecto, basta notar que la sucesión $\left\{\dfrac{n}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente a cero.

Finalmente se concluye que el dominio de convergencia es $[-3,-1)$.

3. (a) Calcular el radio de convergencia R de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

   (b) Demostrar que para todo $x \in (-r,r)$, con $r < R$ se tiene que $(xf(x))'' = \dfrac{1}{1-x}$.

   Solución: El radio de convergencia de la serie esta dado por:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

   Dado a que la serie en el intervalo $(-r,r)$ converge uniformemente [3] y además es infinitamente derivable, derivando término a término se deduce que:

$$(xf(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad (xf(x))'' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

4. Demuestre, integrando la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, que:

$$\ln\frac{3}{2} = \frac{1}{1\cdot 2^1} - \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{4\cdot 2^4} + \cdots$$

   Solución: Nótese que $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ y que la convergencia es uniforme en todo intervalo del tipo $[-c,c\,]$, $c \in (0,1)$ [4], en particular en el intervalo $(0,1/2)$. Integrando término a término sobre dicho intervalo se obtiene que

$$\ln(1+x)\Big|_{x=0}^{x=1/2} = \ln\frac{3}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{x=0}^{x=1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}.$$

[3] Utilizar el criterio M-de-Weiertrass.

[4] La convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ sobre el intervalo $[-b,b]$, con $b \in (0,1)$ a la función $1/(1-x)$ se puede probar utilizando el criterio M-de-Weierstrass. En efecto, nótese que, $\forall x \in [-b,b]$ se tiene que $|x^n| < b^n$, luego dado que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ converge (serie geométrica razón menor que uno), se deduce la convergencia uniforme de $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ sobre $[-b,b]$.

5. Demuestre, derivando término a término la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ que,

$$2 = \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6}{32} + \frac{7}{64} + \cdots$$

Solución: Dado $b \in (0,1)$, elijase r tal que $|b| < r < 1$. Nótese que las series $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$ son uniformemente convergentes en el intervalo $[-r, r]$. Luego, la derivada de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ en $x = b$ es exactamente $\sum_{n=0}^{\infty} nb^{n-1}$. Es decir,

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\Bigg|_{x=b} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\Bigg|_{x=b} = \sum_{n=0}^{\infty} nb^{n-1}$$

De donde, $\frac{1}{(1-b)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nb^{n-1}$. Finalmente tomando $b = 1/2$ se deduce lo pedido.