

## Serie de Taylor Cap. 11

Stein & Barcellos página 749

- 1) Sea  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ; hallar  $P_1(x; 0)$ ,  $P_2(x; 0)$  y elabore sus gráficas junto con la función  $f$ .

Respuesta:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

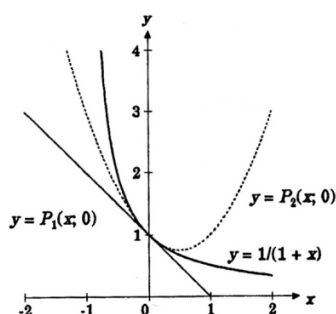
$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{y} \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$\text{Así} \quad f(0) = 1 = a_0$$

$$f'(0) = -1 = a_1$$

$$\frac{f''(0)}{2} = 1 = a_2$$

$$\text{y} \quad P_1(x; 0) = 1 - x; \quad P_2(x; 0) = 1 - x + x^2$$



- 2) Sea  $f(x) = \ln(1+x)$ ; hallar  $P_1(x; 0)$ ,  $P_2(x; 0)$ ,  $P_3(x; 0)$  y elabore sus gráficas junto a la función  $f$ .

$$f(x) = \ln(1+x);$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{y} \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Luego  $a_0 = f(0) = 0$

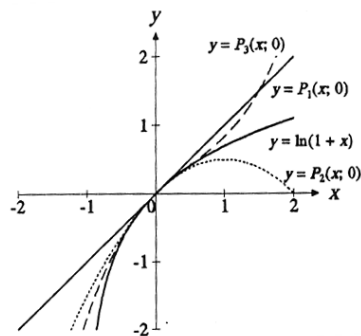
$$a_1 = f'(0) = 1$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3}$$

y  $P_1(x; 0) = x$ ;  $P_2(x; 0) = x - \frac{1}{2}x^2$

$$P_3(x; 0) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$



3) Sea  $f(x) = 2 + 3x - 4x^2$

a) Encuentre  $P_1(x; 0)$ ;  $P_2(x; 0)$ ;  $P_3(x; 0)$

b) ¿Cuál es la serie de Maclaurin asociada con  $f(x)$ ?

Respuesta:

a)  $f(x) = 2 + 3x - 4x^2$

$$f'(x) = 3 - 8x$$

$$f''(x) = -8$$

$$f'''(x) = 0$$

Entonces  $a_0 = f(0) = 2$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2} = -4$$

$$a_1 = f'(0) = -3 \qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = 0$$

$$\text{Entonces } P_1(x; 0) = 2 + 3x; \qquad P_2(x; 0) = 2 + 3x - 4x^2$$

$$P_3(x; 0) = 2 + 3x - 4x^2$$

b) Como  $f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall n > 3$ , la serie de Maclaurin para  $f(x)$  es

$$2 + 3x - 4x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \dots = 2 + 3x - 4x^2$$

4) Encuentre

$$P_6(x; \pi/6) \text{ para } \operatorname{sen} x$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x; \quad f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x; \quad f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x; \quad f^V(x) = \cos x; \quad f^{VI}(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$a_0 = f(\pi/6) = \frac{1}{2}; \qquad a_1 = f'(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_2 = \frac{f''(\pi/6)}{2!} = -\frac{1}{4}; \qquad a_3 = \frac{f'''(\pi/6)}{3!} = -\frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(\pi/6)}{4!} = \frac{1}{48}; \qquad a_5 = \frac{f^{(5)}(\pi/6)}{5!} = \frac{1}{48}$$

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(\pi/6)}{4!} = \frac{1}{48} \qquad a_5 = \frac{f^{(5)}(\pi/6)}{5!} = \frac{\sqrt{3}}{240}$$

$$a_6 = \frac{f^{(6)}(\pi/6)}{6!} = -\frac{1}{1440};$$

$$\begin{aligned}
 P_6(x; \pi/6) = & \\
 = & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \\
 & + \frac{1}{48} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 + \frac{\sqrt{3}}{240} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5 - \frac{1}{1440} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^6
 \end{aligned}$$

- 5) ¿Puede existir un polinomio  $p(x)$  tal que  $\sin x = p(x) \quad \forall x \in [1, 1.0001]$ ? Explique

Respuesta:

No es posible.

Si hubiese un polinomio  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$

entonces  $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} p(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (\sin x) \neq 0$  lo que es una contradicción.

6)

- $y = \arctan x$  ¿es una función par o una función impar?
- ¿Cuáles potencias de  $x$  tendrán un coeficiente de 0 en la serie de Maclaurin asociada con  $\arctan x$ ?
- Encuentre  $P_2(x; 0)$  para  $\arctan x$
- Mediante una calculadora complete la tabla para  $P_2(x; 0)$  y  $\arctan x$  si  $x \in [0, 2]$ .

Respuesta:

- La función  $y = \arctan x$  es impar.  
luego  $P_n(x; 0)$  es un polinomio impar. En efecto, si  $y = \arctan x$  entonces  $x = \tan y$ , como  $\tan(-y) = -\tan(x)$ , se tiene

$$-x = \tan(-y) = -\tan y$$

$$\therefore -y = \arctan(-x)$$

$$y = \arctan(x)$$

$$\Rightarrow \arctan(-x) = -\arctan(x)$$

- Como  $\arctan(x)$  es impar,  $P_n(x; 0)$  es impar, luego las potencias pares tienen coeficientes cero.
- $P_2(x; 0) = x - \frac{1}{3}x^3$

d)

| x   | $P_2(x; 0)$ | $\text{Arctan } x$ |
|-----|-------------|--------------------|
| 0   | 0,000       | 0,000              |
| 0,1 | 0,0997      | 0,0997             |
| 0,2 | 0,1973      | 0,1974             |
| 0,3 | 0,2910      | 0,2915             |
| 0,5 | 0,4583      | 0,4636             |
| 1   | 0,6667      | 0,7854             |
| 2   | -0,6667     | 1,1071             |

## 11.2 El error en la serie de Taylor

- 1) Demuestre que la serie de Maclaurin asociada a  $\cos x$  representa  $\cos x$  para todo  $x$ .

Respuesta:

Como  $R_n(x; 0) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n+1)}(x)$  es o bien  $\pm \cos x$  o  $\pm \sin x$ .

Luego  $|f^{(n+1)}(c_n)| \leq 1$  y  $|R_n(x; 0)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

Finalmente  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$

- 2) Demuestre que la serie de Taylor en  $x=a$  para  $e^x$ , representa  $e^x$  para todo  $x$ .

Respuesta:

$$R_n(x; a) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Como  $c_n \in ]a, x[$ ,  $e^{c_n}$  está en  $]e^a, e^x[$ , luego  $e^{c_n} \leq M$ ,  $M = \max\{e^a, e^x\}$

$$\therefore |R_n(x; a)| \leq M \frac{|x - a|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

Para  $n \rightarrow \infty$  y  $e^x$  es representado por su serie de Taylor en  $x = a$ .

- 3) Estime  $e^{-1}$  con tres cifras decimales

Respuesta:

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Es una serie decreciente y alternada

Entonces

$$R_n < |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\text{Si } n \geq 6; \quad R_n < \frac{1}{7!} < .0005$$

Asi

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = \frac{53}{144} \approx 0.368056$$

- 4) Sea  $f(x) = \sqrt{x}$

- Use un diferencial para estimar  $\sqrt{23}$
- Halle  $P_1(x; 25)$  y úselo para estimar  $\sqrt{23}$
- Calcule el error en la aproximación de (b)
- Use  $P_2(x; 25)$  para estimar  $\sqrt{23}$
- Calcule el error en (d)
- Compare el error calculado en (e) con una cota mediante

$$R_n(x; a) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

Respuesta:

a) Sea  $x_1 = 25$ ;  $x_2 = 23$ ;  $dx = -2$

$$\Rightarrow df = f'(25)dx = \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot (-2) = -0.2$$

$$\Delta f = f(23) - f(25), \text{ con } df \approx \Delta f, \text{ se tiene } \sqrt{23} - \sqrt{25} \approx -0.2 \rightarrow \sqrt{23} \approx 4.8$$

b)  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ;  $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

Entonces  $a_0 = f(25) = 5$ ;  $a_1 = f'(25) = 0.1$

$$a_2 = \frac{f''(25)}{2!} = -0.001 \quad y \quad P_1(x, 25) = 5 + 0.1(x - 25)$$

Luego  $P_1(23, 25) = 4.8$

c) El error en (b) es  $|\sqrt{23} - 4.8| \approx 0.00417$

d) Como  $P_2(x; 25) = 5 + 0.1(x - 25) - 0.001(x - 25)^2$

Se tiene  $P_2(23, 25) = 4.796$

e) El error en (d) es  $|\sqrt{23} - 4.796| \approx 0.000168$

f)  $|R_2(23; 25)| = \left| \frac{f'''(c_n)}{3!} (-2)^3 \right| = \left| \frac{\frac{3}{8}(c_n)^{-\frac{5}{2}}}{3!} (-2)^3 \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c_n^{5/2}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{23^{5/2}} \approx 0.000197,$

Pues  $23 < c_n < 25$ .

5) Demuestre que para  $x \in [0,2]$

$$a) \quad x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x - 1 \leq x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^2 x^{n+1}}{(n+1)!}$$

b) Use (a) para hallar  $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$  con tres cifras decimales

Respuesta:

$$a) \quad \text{Sabemos que } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Si  $x \in [0,2]$  entonces

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

o bien

$$e^x - 1 \geq x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Para  $x \in [0,2]$ ; el resto  $R_n(x, 0) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1}$

y es igual a  $\frac{e^{c_n} x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e^2 x^{n+1}}{(n+1)!}$  pues  $0 < c_n < x < 2$

$$\text{como } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + R_n(x, 0) \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^2 x^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\text{Se tiene que } e^x - 1 \leq x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^2 x^{n+1}}{(n+1)!}$$

b) De (a) se tiene para  $x \neq 0$

$$1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n+1!} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \frac{e^2 x^n}{(n+1)!}$$

Luego es válido para  $0 < x \leq 2$ .

Entonces  $\int_0^1 \frac{e^x x^n}{(n+1)!} dx = \frac{e^2}{(n+1)!(n+1)}$  y si  $n = 6$

$$\int_0^1 \left( 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^5}{6!} \right) dx = \frac{14233}{10800} \approx 1.3179$$

6) Sea  $f$  una función que tiene derivadas de todo orden para cualquier  $x$ .

Suponga que  $|f^{(n)}(x)| \leq n \quad \forall n$

Demuestre por que  $f(x)$  se representa mediante su serie de Maclaurin.

Respuesta:

La razón por que  $f$  se representa por la serie de Maclaurin es que

$$\begin{aligned} |(R_n(x, a))| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(c_n)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{(n+1)|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = \\ &= \frac{|x-a|^{n+1}}{n!} = \frac{|x|^{n+1}}{n!} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

7) Sean  $P(x)$ ,  $Q(x)$  polinomios

Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)e^{-1/x^2}}{Q(x)} \rightarrow 0$$

Respuesta:

Supongamos  $Q(0) \neq 0$

Como  $e^{-1/x^2} \rightarrow 0$ , se tiene  $\frac{P(x)e^{-1/x^2}}{Q(x)} \rightarrow 0$   $x \rightarrow 0$

Si  $Q(0) = 0 \Rightarrow Q(x) = x\tilde{Q}(x)$  y  $\tilde{Q}(0) \neq 0$

Luego

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-u^2}}{\frac{1}{u}} \quad ; u = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} u e^{-u^2} \rightarrow 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)e^{-\frac{1}{x^2}}}{Q(x)} \rightarrow 0$$